EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

Larissa Barros VITORIANO[1]

Orientadora: Prof. MSc. Angela Cristina Bonini dos SANTOS[2]

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo mostrar como surgiu a equação do 2º grau, através da História da Matemática e por um dos matemáticos mais importante do século XII Bhaskara Akaria, e apresentar aos alunos dois métodos de resolução das equações do 2º grau (pela fórmula de Bhaskara e por soma e produto) e por meio de jogos, que despertarão o interesse dos alunos e com isso possivelmente teremos uma melhora na compreensão desse tema.

PALAVRAS-CHAVE:

Equação do 2º grau; história; jogos

1. Introdução

Este trabalho tem como finalidade apresentar aos alunos duas maneiras de resolver uma equação quadrática por meio de fórmulas, uma mais complexa e usada em sala de aula (fórmula de Bhaskara), e outra que utiliza um método mais simples e prático, mas que exige um pouco mais do raciocínio dos alunos (soma e produto). Também apresentarei alguns jogos matemáticos envolvendo essas equações, para despertar o interesse e a compreensão dos alunos.

Por isso busca-se contribuir com esse trabalho para uma melhoria na qualidade do processo de ensino e aprendizagem de equações de 2º grau, utilizando os jogos para permitir um ambiente de interatividade entre os alunos e professores, no qual é possível que o aluno desenvolva um trabalho criativo, de investigação e exploração durante a aula. O aluno precisa relacionar um novo

---

[1]Graduando em Matemática- FIRA- Faculdades Integradas Regionais de Avaré- 18700-902- Avaré SP – Brasil – larissa-vitoriano22@hotmail.com

[2] Departamento de Exatas- FIRA – Faculdade Integradas Regionais de Avaré- 18700-902- Avaré SP - Brasil – angelabonini@hotmail.com

conhecimento a proposições e conceitos relevantes em sua estrutura cognitiva para desenvolver a aprendizagem, ou seja, que já existam com uma mínima noção de clareza, estabilidade e diferenciação. Evidentemente, o professor e seus materiais pedagógicos, como mediadores da aprendizagem, precisam estar articulados com a natureza deste empreendimento educacional.

2. História da Equação de segundo grau

No Brasil, por volta dos anos 60, ninguém sabe como, a fórmula para resolver a equação do 2° grau passou a ser chamada de fórmula de Bháskara.

As equações do 2° grau são resolvidas através de uma expressão atribuída ao matemático e astrônomo indiano Bhaskara Akaria, um dos mais importantes matemáticos do século XII. Segundo BOYER (1996):

> "Foi ele quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta, por exemplo dando uma solução geral da equação de Pell e considerando o problema da divisão por zero".

Os babilônios, egípcios e gregos também utilizavam técnicas capazes de resolver esse tipo de equação anos antes de Cristo. Os Babilônios utilizavam textos e símbolos como ferramentas para auxiliar na resolução, já os gregos conseguiram concluir suas resoluções realizando associações com geometria, por exemplo, possuíam uma forma geométrica para solucionar problemas ligados a equação do 2° grau.

Segundo o Caderno do professor da 8ª série/ 9° ano, volume 1, da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, uma equação do 2° grau, como por exemplo, $x^2 + 8x = 65$, é resolvida pelo método da geometria assim:

I) As expressões x^2 e $8x$ eram interpretadas como as áreas de um quadrado e de um retângulo. A solução do problema é, então a medida do lado do quadrado:

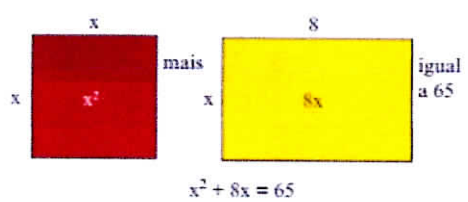

Figura 1: Representação geométrica de equação de 2° grau

Fonte: Caderno do professor da 8ª série/ 9° ano, volume 1

II) O retângulo era dividido em dois retângulos de mesma área. A equação era interpretada como:

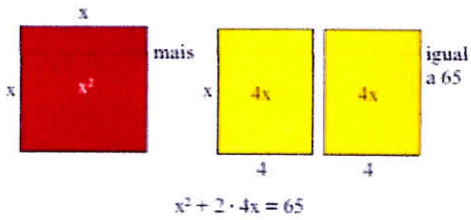

Figura 2: Representação geométrica de equação de 2° grau

Fonte: Caderno do professor da 8ª série/ 9° ano, volume 1

III) Cada retângulo era arranjado de modo que ficasse, justapostos a dois lados do quadrado. Com essa composição, a área da figura continuava sendo 65.

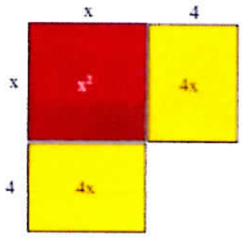

Figura 3: Representação geométrica de equação de 2° grau

Fonte: Caderno do professor da 8ª série/ 9° ano, volume 1

IV) De modo a completar o quadrado acrescentava-se um quadrado no canto da figura anterior. A medida do lado desse quadrado é a mesma do lado conhecido do retângulo, ou seja 4. Assim, a área do novo quadrado é 4.4 = 16. Com esse método, "completa-se um quadrado perfeito" de lado x + 4 e a área igual a 65 + 16 = 81.

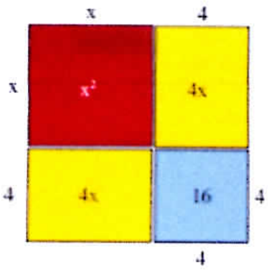

Figura 4: Representação geométrica de equação de 2° grau

Fonte: Caderno do professor da 8ª série/ 9° ano, volume 1

$x^2 + 2.4x + 16 = 65 + 16$ ou $(x + 4)^2 = 81$

V) Sendo a nova área 81, então a medida do lado do novo quadrado é $\sqrt{81} = 9$. Assim, o lado do quadrado $x + 4 = 9$, portanto $x = 5$ é a solução. Como se tratava da área era usado apenas a resposta positiva, sendo assim, descartando a negativa.

Mas foi com o francês Viète que o método resolutivo das equações quadráticas ganharam como símbolo, as letras. Ele também foi responsável pela modernização da álgebra.

Para uma compreensão mais geral e contextualizada do desenvolvimento dos conceitos envolvidos com equações do segundo grau e suas possíveis resoluções, possui uma revisão dos seus conceitos históricos.

Muitos povos tiveram a necessidade de trabalhar com equações do segundo grau, os primeiros indícios desse tipo de equação foram encontrados em documentos antigos deixados pelos povos do Egito, Babilônia, China, Grécia e outros.

Na Babilônia (1700 a.C), os registros eram feitos em tábuas de argilas. Em relação às equações encontradas nessas tábuas de argila, suas resoluções eram feitas por meio da álgebra retórica como uma receita.

Qual o lado de um quadrado em que a área menos o lado dá 870?

A resolução era dada da seguinte forma:

Tome a metade de 1 (coeficiente x) e multiplique por ela mesma (0,5. 0,5 = 0,25). Some o resultado a 870 (termo independente). Obtém-se um quadrado (com lado 29,5), cujo lado somado à metade de 1 vai dar 30, o lado do quadrado procurado.

Os gregos Tales de Mileto, Pitágoras e Euclides apresentaram equações resolvidas através de construções geométricas.

Dividir um segmento de reta dado de maneira que o retângulo determinado pelo todo e por uma das partes seja o quadrado sobre a outra parte. Seja AB = a o segmento dado, encontrar um ponto H neste segmento de modo que (AB) . (HB) = AH.

Ou ainda, se AB = a e AH = x temos:

$a(a - x) = x^2 \quad \leftrightarrow \quad a^2 = x^2 + ax$

Vários matemáticos contribuíram para chegar ao consenso sobre a solução de uma equação de segundo grau.

3. Fundamentação Teórica

Para uma compreensão mais geral e contextualizada, o presente trabalho tem como finalidade mostrar duas maneiras de resolução de uma equação de 2° grau e alguns possíveis jogos matemáticos que podem complementar e ajudar os alunos em suas dificuldades.

Muitas vezes, as situações que envolvem conteúdos trabalhados em sala de aula se restringem a um esquema de cálculo ou a procedimentos mecânicos apresentados de forma tradicional, sem significado e descontextualizados. No ensino, é comum o uso de técnicas para a resolução por algoritmos matemáticos, sem uma preocupação de mostrar para os alunos o significado das etapas da resolução de uma equação ou de diferentes possibilidades para resolvê-la, para evitar que esse fato continue ocorrendo, é necessário que os professores busquem métodos diferenciados que permitam melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática de modo que os estudantes se sintam motivados a aprender.

Segundo SMOLLE (2007):

> "Os jogos estão baseados em uma perspectiva de resolução de problemas, ela é baseada na proposição e no enfrentamento chamado situação - problema trata-se situações que não possuem solução evidente e que exigem que o resolvedor combine seus conhecimentos e decida-se pela maneira de usá-los em busca da solução".

A mesma autora também defende que:

> "com relação ao trabalho com a Matemática, temos defendido a ideia de que há um ambiente a ser criado na sala de aula que se caracterize pela proposição, pela investigação e pela exploração de diferentes situações problemas por parte dos alunos, o jogo é uma das formas mais adequadas para que a socialização ocorra e permita aprendizagem."

4. Demonstração segundo Bhaskara

Considere a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Multiplicar os dois lados por $4.a$:

$$4a.(ax^2 + bx + c) = 0.4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somar b^2 aos dois lados:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

Nota-se que o primeiro membro se tornou um trinômio quadrado perfeito, que pode ser fatorado.

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Colocando a raiz quadrada dos dois lados, temos:

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde:

Delta (Δ): representada pela letra grega, é o discriminante da equação.
x: é uma variável, também chamada de incógnita
a: coeficiente quadrático
b: coeficiente linear
c: coeficiente constante

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{e} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Os coeficientes dessa equação são os números que ocupam o lugar de "a" ou "b" e" c". Portanto o coeficiente "a" é o número que multiplica o x^2, o coeficiente "b" é o número que multiplica x e o coeficiente "c" é o número que não multiplica incógnita.

Como resolver equações do segundo grau com a fórmula de Bháskara?

Devemos encontrar os valores de x, ou da incógnita proposta que fazem com que essa equação seja igual a zero, ou seja, substituir os valores encontrados no x_I e x_2 fazendo com que a equação seja igual a zero.

Para facilitar a compreensão dos alunos, na resolução da fórmula de Bhaskara utilizamos 3 etapas:

1ª etapa: Calcular o discriminante

Discriminante é a expressão presente dentro da raiz na fórmula de Bhaskara e é representada pela letra grega Δ (delta) e recebe esse nome pelo fato de discriminar os resultados de uma equação.

$\Delta > 0$: duas raízes distintas (diferentes)

$\Delta < 0$: não possui raiz real

$\Delta = 0$:duas raízes iguais ou uma única raiz real

Para calcular as raízes, primeiramente calcule o valor numérico de Δ.

2ª etapa: Substitua discriminante e os coeficientes na fórmula.

Nesta etapa basta substituir os valores de Δ e dos coeficientes da equação de 2º grau.

3ª etapa: Calcule as raízes da equação

Note que existe um sinal ±. Esse sinal significa que devem ser realizados dois cálculos. O primeiro para o caso em que o número que o segue seja positivo e o segundo para o caso em que o número seja negativo. É como nomear cada um desse resultados como x_1 e x_2 ou x_I e x_{II}.

5. Demonstração por Soma e Produto

Sejam as raízes da equação $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Sua soma será:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

E seu produto:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) . \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{(-b)^2 + b\sqrt{\Delta} - b\sqrt{\Delta} - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Vamos resolver a equação $x^2 + 9x + 14 = 0$.

Primeiramente descobrir quais são os valores dos meus coeficientes

$a = 1$, $b = 9$ e $c = 14$

A soma de suas raízes é: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-9}{1} = -9$

O produto de suas raízes é: $x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{14}{1} = 14$

Com base nesses valores, devemos determinar quais os números em que a soma seja -9 e o produto 14

7 e 2	–7 e 2	7 e –2	–7 e –2
S= 7 + 2 = 9	S= –7+2 = –5	S= 7 + (–2) = 5	S= –7 + (–2) = –9
P = 7.2 = 14	P = –7.2 = –14	P = 7. (–2) = –14	P= –7. (–2) = 14

Portanto as raízes da equação $x^2 + 9x + 14 = 0$ possui como resultado o par –2 e –7.

Dica: devemos ir por tentativa e resolver a soma primeiro, poderíamos ter colocado -10+1 = -9, mas -10.1 não é igual a 14 , ou poderíamos ter usado -15+6=-9 mas -15.6 não é igual a 14, os dois números tem que ser válidos tanto para a soma quanto para multiplicação.

6. Pesquisa

Foi realizada em sala de aula, uma atividade sobre o conteúdo equação do 2° grau com os alunos do reforço do 9° ano C (5 alunos) e 9° Ano D (7 alunos), de uma escola da rede estadual de ensino do estado de São Paulo.

Num primeiro momento foi solicitado que os alunos resolvessem os seguintes exercícios:

1) Identifique os coeficientes de cada equação e diga se ela é completa ou não:
a) $5x^2 - 3x - 2 = 0$
b) $3x^2 + 55 = 0$
c) $x^2 - 6x = 0$
d) $x^2 - 10x + 25 = 0$
2) Achar as raízes das equações:
a) $x^2 - x - 20 = 0$
b) $x^2 - 3x - 4 = 0$
c) $x^2 - 8x + 7 = 0$

3) Dentre os números -2, 0, 1, 4, quais deles são raízes da equação $x^2-2x-8=0$?

Após a correção da atividade, foi possível observar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos.

Dificuldade apresentada	N° de alunos	%
Não identifica os coeficientes	3	25%
Não consegue descobrir o delta	2	17%
Não consegue resolver nenhum exercício	2	17%
Não identifica uma equação incompleta	4	33%
Não consegue resolver regra de sinais	5	42%
Não consegue encontrar as duas raízes	2	17%
Total de alunos observados	12	100%

Tabela 1: Diagnóstico de alguns alunos do 9º ano C e D

Fonte: Tabulação própria

Podemos observar que a maioria dos alunos mostram dificuldades em resolver os exercícios por causa da regra de sinais e na identificação de uma equação incompleta, devido a essas dificuldades apresentadas, pesquisei alguns jogos para ajudá-los a compreender melhor uma equação do 2º grau.

7. O uso de jogos

A proposta de um jogo em sala de aula é muito importante para o desenvolvimento social, pois existem alunos que se fecham, ou seja, tem vergonha de perguntar sobre determinados conteúdos, fazendo com que a Matemática se torne um problema para ele, com a ajuda dos jogos matemáticos é possível uma melhor compreensão do conteúdo, sendo assim permitindo um ambiente de interatividade entre os alunos e professores.

De acordo com o PCN(1998):

> " Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes - enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório - necessárias para a aprendizagem da Matemática."

O jogo "Perfil das Equações" é um material composto por um tabuleiro, cartas de dicas e pinos. Cada carta fornece dicas sobre uma equação a ser escrita pelos jogadores.

Exemplo de carta do jogo "Perfil das equações":

$-x^2 - 7x - 8 = 0$

1- Perca a vez.

2 - Sou uma equação completa do tipo $ax^2 + bx + c = 0$.

3 - O coeficiente do meu 2º termo é -7.

4 - Avance dois espaços.

5 - Perca a vez

6 - Meu terceiro termo é -8.

7- A parte literal do meu 2º termo é x.

8 - O coeficiente do meu 1º termo é -1.

9 - Meu 2º termo é $-7x$.

10 - Fique sem jogar duas rodadas.

11 - Meu 1º termo é $-x^2$.

12- Avance um espaço

Figura 5: Tabuleiro

Fonte: SlideShare: Perfil das equações do 2º grau

Dividir em equipes com 5 alunos, um será o leitor das dicas, e os outros alunos serão os jogadores. Cada jogador na sua vez escolhe um número de 1 a 12, e o leitor lê as dicas de acordo com os números que foram escolhidos e todos anotam, com essas dicas os alunos escrevem uma equação do segundo grau correspondente. O jogador que acertar a equação anda cinco casas. O jogo termina quando um jogador chega ao final do caminho desenhado no tabuleiro.

Para entender melhor o jogo os alunos precisam saber quais aspectos que caracterizam uma equação do segundo grau, e percebem a diferença entre uma equação do segundo grau completa e uma incompleta e saber identificar os coeficientes.

Os objetivos deste jogo são identificar os coeficientes de uma equação do 2° grau e classificar essa equação em completa ou incompleta.

Uma outra atividade é o "Jogo vai e vem das equações". Ele é composto por tabuleiro, pinos, cartas com equações e fichas de inversão de sinais.

Figura 6: Cartas e fichas de inversão de sinal

Fonte : Equação sem complicação (Eureka)

Os alunos serão divididos em grupos de quatro pessoas, formando assim duplas para competir.

Cada grupo receberá um tabuleiro, pinos, cartas com as equações e seis fichas de inversão de sinal. Sendo assim cada dupla sorteia uma equação e resolvem, em seguida trocam as soluções para a correção e devolvem as folhas. Quem errar permanece onde está no tabuleiro, se acertar a solução da equação, a dupla opera as duas raízes encontradas escolhendo uma das quatro operações básicas.

O resultado, incluindo o sinal, será o número de casas que a dupla irá caminhar no tabuleiro, se o resultado for positivo caminha do lado positivo, se o lado for negativo caminha do lado negativo. Se a equação não possuir raízes reais, a dupla caminha cinco casas na direção que quiser. Os jogadores podem inverter o sinal do resultado da operação, utilizando as fichas de inversão de sinal, é só falar e devolver a ficha à mesa, mas isso só pode ser feito três vezes durante o jogo.

Os objetivos deste jogo são resolver equações do 2° grau, trabalhar regra de sinais e operar com números reais.

8. Conclusões

Espero, então, que este trabalho possa contribuir para que outros professores mudem suas metodologias, trazendo aos alunos uma oportunidade para uma aprendizagem com mais significado, e mostrar aos alunos métodos mais fáceis de resolver uma equação de segundo grau.

Os jogos sobre o conteúdo equação do segundo grau serviram como facilitadores da aprendizagem e desafiaram os alunos, que desenvolveram a criticidade, a intuição, a criação de estratégias e perderam o medo de errar.

9. Referências

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 1° e 2° ciclos do Ensino Fundamental – Matemática.** Brasília, 1998.

CADERNO DO PROFESSOR; Matemática, ensino fundamental – 8ª série/9° ano, volume 1. Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Campos Granja, José Luiz Pastore Mello, Nilson José Machado, Roberto Perides Moisés, Walter Spinelli. – São Paulo: SEE, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**, volume único. São Paulo: Ática, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática.** Campinas, Editora Unicamp, 2004.

GRUPO EUREKA **Jogo do vai e vem.** Disponível em: http://equaçaosemcomplicçcao.blogspot.com.br/2012/05/etapa-3-jogo-vai-e-vem-das-equacoes.html. Acesso em 2 de julho de 2014.

PERES, Eliana Cristina e TRIVIZOLI Lucieli Maria. **JOGOS MATEMÁTICOS E EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU**. In: OS DESAFIOS DA ESCOLA PÚBLICA PARANAENSE NA PERSPECTIVA DO PROFESSOR, 2014.

SEE - SP (org), **Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias**. 1ªed. São Paulo: FDE, 2011.

SILVA, Fernanda A. M. da. **Perfil das Equações do 2º Grau**. Disponível em:http://pt.slideshare.net/FAMSilva/perfil0das-equaçoes-do-2-grau. Acesso em 2 julho. de 2014.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez e MILANI, Estela. **Jogos de Matemática de 6º a 9º ano**. Porto Alegre: Artmed, 2007.