APLICAÇÕES DE CRESCIMENTO E DECAIMENTO EXPONENCIAL COM O USO DE LOGARITMOS

Leandro Teruel **FERRUCI**[1]

Profª Dra. Luciane de Fátima Rodrigues de **SOUZA**

RESUMO

Este trabalho visa modelar algumas aplicações que envolvam crescimento ou decaimento exponencial, abordando também a ideia do logaritmo natural e equações diferenciais, sendo estas, belas aplicações do cálculo diferencial e integral. Estes conceitos revolucionaram não só a matemática, mas todas as outras áreas e campos de pesquisa, dando suporte a toda a revolução tecnológica presente.

PALAVRAS CHAVE

Cálculo; Exponencial; Modelagem Matemática.

1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral, também chamado de cálculo infinitesimal, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o cálculo é a matemática a ser empregada (STEWART, 2001).

O Cálculo foi desenvolvido como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas. Sua descoberta se deve a dois grandes matemáticos do século XVII, Isaac Newton (1642-1727) e GottfriedWlhelm Leibniz (1646-1716). Newton nasceu prematuramente no dia de natal de 1642 (SWOKOWSKI, 1994).

Seu pai tinha morrido antes que ele nascesse, e sua mãe casou-se novamente quando ele tinha três anos. O menino foi educado pela avó enquanto freqüentava a escola, foi quando um tio do lado materno percebeu no sobrinho um grande talento matemático incomum e convenceu a mãe

[1] Aluno da Pós de Matemática e suas Tecnologias-FIRA- Faculdades Integradas Regionais de Avaré – 18700-092 – Avaré-SP- Brasil – leandro.ferruci.1@outlook.com

de Isaac a matriculá-lo em Cambridge. No início de seu primeiro ano em Cambridge o talentoso Newton comprou e estudou um exemplar de Euclides, também veio a conhecer obras de Galileu, Fermat, Huygens e outros. Não admira que Newton mais tarde escrevesse a Hooke ``Se eu enxerguei mais longe que Descartes é porque me sustentei sobre os ombros de gigantes`` (FINNEY, 2002).

Nos primeiros meses de 1664, Newton fez grandes descobertas que revolucionaram o Cálculo Diferencial, exprimir funções em termos de séries infinitas, e também começou a pensar, em 1665, na taxa de variação, ou fluxo, de quantidades variáveis continuamente, ou fluentes, tais como comprimentos, áreas, volumes, distâncias, temperaturas. Então Newton ligou esses dois problemas, das séries infinitas e das taxas de variação, como ``meu método``(FINNEY, 2002).

Não é possível falar sobre Cálculo Diferencial sem falar sobre Leibniz, que nasceu em Leipzig, onde aos quinze anos entrou na universidade e aos dezessete obteve o grau de bacharel (EDWARDS, 2005).Aos vinte ele estava preparado para o grau de doutor em direito, mas esse lhe foi recusado por causa de sua pouca idade. Por volta de 1676, Leibniz tinha chegado á mesma conclusão a que Newton chegara vários anos antes, tendo assim ambos uma influência significativa nas teorias de Cálculo Diferencial desenvolvidas naquela época.

Neste sentido, este trabalho vem apresentar uma abordagem sobre a aplicação da Função exponencial à resolução de uma situação problema, que é controle de uma determinada doença.

2. Metodologia

Para a elaboração deste trabalho foram consultados livros que abordam o tema, principalmente os de Cálculo Diferencial e Integral, e artigos científicos publicados sobre o assunto em revistas especializadas.

3. Aplicação e Discussões

3.1. Definindo a função exponencial

Partindo do princípio que uma quantidade y cresce ou decresce a uma taxa proporcional a seu tamanho em dado momento, demonstra-se a lei da variação exponencial do tipo

$$y = y_0 e^{kt}$$

Da definição de proporcionalidade entre a taxa e o tamanho da população em determinado momento t, tem-se que:

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Considerando no instante inicial, $y = y_0$ quando $t = 0$

De imediato conclui-se que a função constante y = 0 é solução da equação (1) se $y_0 = 0$. Para achar soluções diferentes de zero, a equação anterior será dividida toda por y:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = k$$

É feita a integração de ambos os lados em relação a t;

$$\int dt \frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \int kdt$$

Como, a integral de $1/y$ dy = ln $|y| + C$

$$\ln|y| = kt + C$$

Aplicando-se logaritmo de ambos os lados, otemos

$$|y| = e^{kt+c}$$

Na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e soma-se os expoentes;

$$|y| = e^c e^{kt}$$

Como $|y| = r$, se e somente se, $y = \pm r$, $\pm e^c$ será chamado de y_0, ou seja, o valor inicial da população;

$$y = y_{0e^{kt}}$$

Portanto, partindo de uma equação diferencial simples, foi possível chegar a demonstração da lei da variação exponencial. O cálculo diferencial e integral, além de sua importância na demonstração e no entendimento da lei, também aparece em várias aplicações de crescimento e decaimento exponencial que serão vistas abaixo.

3.2. Aplicação da função exponencial ao problema de incidência de uma doença

É possível modelar a maneira como uma doença desaparece quando tratada adequadamente assumindo que a taxa dy/dt, na qual o número de pessoas infectadas se altera, é proporcional ao número y. O número de pessoas curadas é proporcional ao número daquelas que contraem a doença.

3.2.1. Situação problema

Em uma pequena cidade do interior de São Paulo foram constatados vários casos de dengue e a cidade está realizando campanhas de prevenção para que consiga reduzir os ataques. Uma pesquisa foi realizada na cidade, e verificou-se que o número de casos foi reduzido em 20% (EDWARDS, 2005).

Sabe-se que hoje existam 10.000 casos registrados do mosquito.O hospital e a prefeitura uniram-se para estudar quanto tempo seria necessário para que o número de casos caísse para 1000. Outro estudo também foi realizado, visando saber quanto tempo mais seria necessário para eliminar todos os casos do mosquito.

3.2.1.1. Resolução da Situação problema

Usaremos a equação $y = y_0 e^{kt}$. Temos, então, de achar três coisas: o valor de y_0, o valor de k e o instante t em que $y = 1000$.

Contando a partir de hoje, então $y = 10.000$ quando$t = 0$, logo $y_0 = 10.000$. Assim, a nova equação será

$$y = 10.000e^{kt}$$

Quando $t = 1$ ano, o número de casos será 80% de seu valor presente. Desse modo,

$$8.000 = 10.000e^{k1}$$

$$e^k = 0,8$$

Aplicando-se logaritmo de ambos os lados, temos

$$\ln(e^k) = \ln\ 0,8$$

$$k = \ln\ 0,8 < 0$$

Em qualquer instante t,

$$y = 10.000e^{(\ln\ 0,8)t}$$

Estabelecendo $y = 1000$ na equação acima, será encontrado o valor de t:

$$1000 = 10.000e^{(\ln\ 0,8)t}$$

$$e^{(\ln\ 0,8)t} = 0,1$$

Aplicando-se logaritmo de ambos os lados, temos

$$(\ln\ 0,8)t = \ln\ 0,1$$

$$t = \frac{\ln\ 0,1}{\ln\ 0,8}$$

$$t \cong 10{,}32\ anos$$

Ou seja, encontra-se que levará pouco mais de dez anos para reduzir o número de casos a 1.000.

Existem várias outros modelos de crescimento e decaimento exponencial que lidam com grandezas cuja taxa de variação no instante t é proporcional a quantidade de grandeza presente nesse instante.

O decaimento radioativo de uma amostra de rádio, crescimento demográfico de uma população de drosófilas, juros compostos capitalizados continuamente, são exemplos em que se utiliza a lei da variação exponencial. No problema proposto acima, foi trabalhado com o modelo dessa lei na elaboração e resolução do mesmo. Os demais exemplos citados são para constar as várias aplicações que o Calculo Diferencial e Integral nos apresenta, usando o modelo da lei de variação exponencial.

Conclusão

Com o uso das ferramentas de Calculo Diferencial e Integral, foi possível realizar a demonstração da lei da variação exponencial. Através dessa demonstração, pode-se usar esse modelo na resolução de um problema envolvendo a incidência de uma doença, assim como, sua possível erradicação.

Referências Bibliográficas

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo I. 8. ed. São Paulo: Bookman, 2007.

EDWARDS, Larson. Cálculo com Aplicações. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.

FINNEY, Ross L.; et al. Cálculo de George B. Thomas Jr. 10 ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v. 1.

STEWART, James. Cálculo. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2001. v. 1.

SWOKOWSKI, E.W. Cálculo com geometria analítica. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1994.