TEORIA MUSICAL NO ENSINO DAS OPERAÇÕES DE DIVISÃO, MULTIPLICAÇÃO E ADIÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Juliano Vitor **CURTO**[1]

Orientador: Prof. MSc. Danilo Eudes **PIMENTEL**[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um método de ensino de divisão, multiplicação e adição de frações que se baseasse na interdisciplinaridade e transversalidade com a Teoria Musical e aplicá-lo em uma sala do Ensino Fundamental, para assim investigar a efetividade de tal método. Através da revisão bibliográfica de métodos anteriores que relacionaram a Teoria Musical e a Matemática, ocorreu a elaboração de um material específico para a aplicação na sala de 9° ano onde se deu esta pesquisa. Este material foi composto de avaliações de sondagem inicial e final. Também envolveu uma apostila com um capítulo dedicado à divisão e a duração relativa das figuras musicais, à multiplicação e a duração absoluta das figuras musicais e à adição e as ligaduras. As explicações e exercícios do material envolveram o método tradicional de ensino aliado às explicações com simbologia musical, buscando assim revisar e ensinar as operações de modo concreto e aplicável. Ao final da pesquisa notou-se que o método desenvolvido para a aplicação conseguiu que os alunos obtivessem melhores resultados na divisão e multiplicação de frações. Entretanto, na adição de frações não houve a melhora esperada nos resultados da lista de sondagem inicial comparados aos da lista inicial.

PALAVRAS CHAVE

Frações; Teoria Musical; Simbologia.

Introdução

Durante o período de estágio, nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental dos anos finais da Escola Estadual onde esta pesquisa foi realizada, foi possível identificar que os alunos possuíam dificuldade nas operações matemáticas básicas utilizando frações. Foi constatado que grande parte dos discentes não dominava, ou então, não sabia operar com números fracionários.

A Teoria Musical, ou seja, todo o estudo e a simbologia por trás da representação gráfica da Música, apresenta diversas aplicações matemáticas. Entre tais aplicações se encontram as frações, e nesse universo, a relação entre as figuras musicais e as operações básicas com números fracionários. As figuras musicais "[...] são um conjunto de sinais representativos das durações. São sete os valores que representam as figuras [...] no sistema musical." (MED, 1996, p. 20), e entre estas sete figuras se apresenta uma proporção, sendo

[1] Graduando em Matemática – FIRA-Faculdades Integradas Regionais de Avaré – 18700-902 – Avaré-SP – Brasil – E-mail: juliano.vitor.curto@gmail.com

[2] Departamento de Exatas– FIRA-Faculdades Integradas Regionais de Avaré – 18700-902 – Avaré-SP – Brasil – E-mail: daniloepimentel@yahoo.com.br

possível trabalhar a divisão, a multiplicação e a soma de frações apenas com conceitos básicos de Teoria Musical.

Portanto, constatou-se durante a pesquisa que esta transversalidade poderia gerar interesse nos alunos, porque estes poderiam notar uma aplicação prática do estudo de números fracionários, evitando deter-se apenas aos métodos tradicionais, como nos diz o PCN, em:

> Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade (BRASIL, 2000, p.9.).

Sendo assim, em teoria, a elaboração de atividades envolvendo figuras musicais no estudo das divisões, multiplicações e somas de frações, seria um modo efetivo de trabalhar tais conceitos matemáticos, como mostrou Priscíla Gomes Olegário, em sua monografia para obtenção da Licenciatura em Matemática, onde desenvolve uma metodologia relacionando conceitos musicais ao ensino da Matemática, cita Vaz e Pinho (2011) para sustentar que tal interdisciplinaridade entre música e frações pode ser válida:

> [...] O estudo de frações pode perfeitamente relacionar-se a diversos campos do conhecimento e precisa, de alguma forma, estar inserido em alguma forma de atividade habitual à criança.
>
> A música é um exemplo: seu caráter universal, sua disponibilidade fácil a pessoas de todas as classes sociais e o fato de possuir uma linguagem própria, como a matemática, justificam a sua escolha como veículo de aprendizagem (VAZ; PINHO, 2011, p.192 apud OLEGÁRIO, 2013, p.17.).

Até mesmo os Planos Curriculares Nacionais, justificam a aplicação da Matemática a Música, como algo que é insubstituível, não podendo se explicar os compassos (integrantes da Teoria Musical) de outra maneira, como pode se notar no trecho seguinte:

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, **da música** à informática, da medicina à cartografia, das engenharias as comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, **quantificar e interpretar compassos**, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, freqüências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2000, p.9, *grifo nosso*).

Então, partiu-se da hipótese que relacionar tais conteúdos seria eficaz no ensino de frações nos anos finais do Ensino Fundamental. Portanto, como objetivo geral, a pesquisa buscou tornar efetiva e prática a aplicação das figuras musicais nas operações básicas com frações. Porém, foram trabalhadas apenas as divisões, multiplicações e adições, excluindo as subtrações, onde seria necessário um aprofundamento muito maior em Teoria Musical, para se alcançar os conceitos que seriam pertinentes à sua aplicação nas subtrações.

A pesquisa de campo foi realizada em uma sala de 9º ano, de uma Escola Estadual de Avaré-SP. O motivo da escolha desta sala foi a professora efetiva ter percebido grande dificuldade nesta área, por parte dos alunos.

A aplicação da pesquisa consistiu em exercícios de sondagem para avaliação inicial e análise do panorama dos alunos da sala envolvida, da elaboração de apostila para realização de atividades e explanação dos conceitos musicais e matemáticos, e de aulas expositivo-dialogadas, com a presença da professora efetiva da classe durante todo este período em sala.

Relação entre Teoria Musical e Matemática

A relação existente entre a Matemática e a Música é muito antiga, e devido às muitas ligações e semelhanças que relacionam tais assuntos, despertou o interesse de estudiosos de ambas as áreas, como David Wright deixa evidente, em seu livro "Mathematical World: Mathematics and Music":

> Foi observado que a Matemática é a mais abstrata das ciências, e que a música é a mais abstrata das artes. [...] Portanto, não é surpresa que a simbiose das duas disciplinas seja uma história antiga. O matemático grego Pitágoras notou as relações entre as frequências dos tons musicais em um intervalo consonante; no século XVIII o músico J. S. Bach estudou o problema matemático usado para encontrar um jeito prático de como afinar instrumentos de teclas. No mundo atual não é incomum encontrar indivíduos que possuem ao menos algum interesse em ambas os assuntos. (WRIGHT, 2011, *tradução nossa*)

Como a Teoria Musical estuda um amplo universo, foi preciso buscar campos onde existisse uma relação com as frações. Além disso, era preciso que tais assuntos pudessem ser explorados e explicados para leigos em Música, com relativa facilidade. Através da pesquisa, escolheram-se como objetos de estudo as "durações das figuras musicais", interligando as durações relativas à divisão de frações, as durações absolutas às multiplicação de frações e as ligaduras à adição de frações.

Conceitos da Teoria Musical utilizados na pesquisa

Para se grafar a Música utilizando partituras, utiliza-se a pauta ou pentagrama, que é composta de cinco linhas e quatro espaços onde se anotam as figuras musicais. Porém, nas atividades em sala, a pauta não será explorada, por não ser pertinente às atividades. Para grafar-se a Música na pauta, é preciso saber a altura, as durações relativas e absolutas, e os valores das notas. Bohumil Med nos dá uma definição destes conceitos em sua obra "Teoria da Música":

> Na notação musical atual, cada nota escrita na pauta informa a **altura** (posição da nota na linha ou no espaço de pauta), e também a **duração** (formato e configuração

da nota). A **duração relativa** dos sons é definida pelos valores (os valores definem as proporções entre as notas). **A duração absoluta** é dada pela indicação do andamento. **Valor** é o sinal que indica a duração relativa do som e do silêncio. [...] (MED, 1996, *grifo nosso*)

Figura 1: pauta musical (MED, 1996, p.14)

Para o trabalho em classe, não serão consideradas as alturas expressas pela pauta, apenas as durações e valores, expressos pelas figuras musicais. Como dito anteriormente, as figuras musicais "[...] são um conjunto de sinais representativos das durações. São sete os valores que representam as figuras [...] no sistema musical." (MED, 1996, p. 20). Existem sete figuras musicais, que possuem nomes específicos e seguem uma proporção, conforme mostram as Figuras 2 e 3:

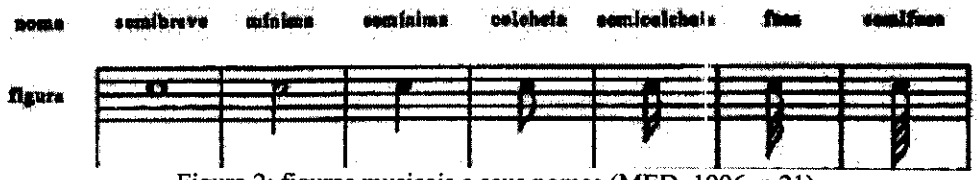

Figura 2: figuras musicais e seus nomes (MED, 1996, p.21)

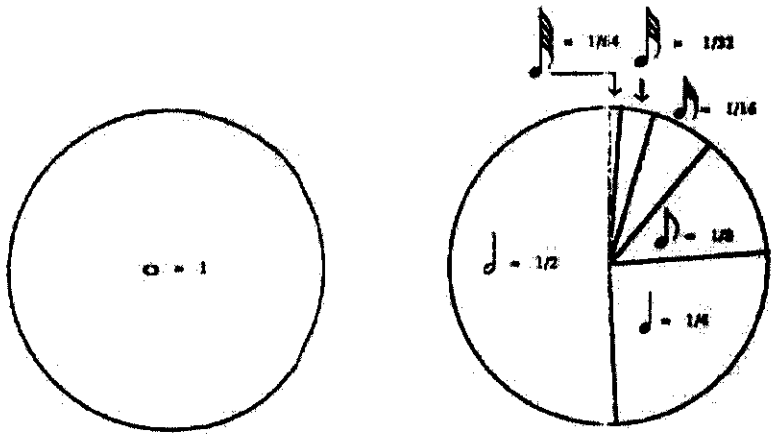

Figura 3: Proporção das durações relativas das figuras musicais (MED, 1996, p.28)

Por último, existem as barras de compassos, que dividem as pautas musicais em séries regulares de pulsações, os ditos tempos da música. Cada compasso tem uma fórmula de compasso, onde temos uma fração em que o denominador significa a quantidade de tempos e o numerador, que indica a qualidade dos tempos, ou seja, a figura musical que serve de base para a divisão dos tempos, como pode ser visto no exemplo dado na Figura 4.

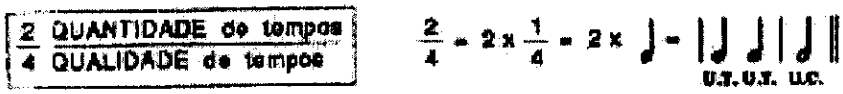

Figura 4: Durações relativas utilizadas nas atividades, onde a fórmula indica que dentro do compasso existem dois tempos, e cada tempo corresponde a uma semínima. (MED, 1996, p. 122)

Porém o conceito de compasso não será aprofundado durante as aulas, entretanto foi necessária tal contextualização para explicar-se que, como na grande maioria das músicas atuais a qualidade de tempos é indicada pela semínima, está terá a duração relativa valendo um. Então, nas aulas considerou-se a semínima como um tempo ou pulsação (um inteiro na Matemática), tendo partido desta todas as proporções das durações relativas. Sendo assim, durante as atividades desenvolvidas em sala foram utilizadas as proporções da Figura 5.

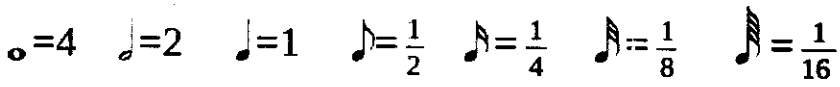

Figura 5: Figura elaborada pelo autor, indicando as durações relativas utilizadas nas atividades

Outro conceito que será relacionado às frações, será a ligadura (ou *legato)*, mais especificamente a ligadura de prolongamento, sendo que "LIGADURA é uma linha curva [...] grafada sobre ou sob figuras." (MED, 1996, p.47) e "Ligadura de prolongamento é a ligadura colocada entre sons da mesma altura, somando-lhes a duração." (MED, 1996, p.47).

Figura 6: exemplo de ligaduras entre semínimas, que ligadas possuem a duração de uma mínima (MED, 1996, p.47)

Metodologia

Exercícios para sondagem

Tendo o tema da pesquisa em mente, foi escolhida a sala participante da pesquisa de campo, realizada em uma Escola Estadual. Nesta escola, apesar da dificuldade nas operações com frações ter sido relatada tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Fundamental, a pesquisa se focou no ano final do Ensino Fundamental, ou seja, no 9º ano, pois a sala onde ocorreu a pesquisa se mostrou defasada no tocante a este conteúdo, segundo a professora da sala. Então, para ter-se ideia do desempenho dos alunos antes da intervenção, e possivelmente, confirmar-se a defasagem foi elaborada por nós uma lista de nove exercícios,

com três operações de divisão de frações, três exercícios de multiplicação de frações e também, três exercícios de adição de frações.

A aplicação desta lista ocorreu de forma individual, sendo que os alunos tinham a possibilidade de consultar o professor quanto a pequenas dúvidas relativas à avaliação, e este realizou a correção das operações da lista junto à sala após a realização desta. Quando questionados se sabiam realizar as operações, muitos discentes demonstraram dúvida, disseram não ter aprendido ou terem se esquecido dos métodos de resolução. Portanto, poucos alunos conseguiram resolver os exercícios por conta própria. Então, após coletar os resultados, o professor realizou a correção dos exercícios, utilizando a lousa e dialogando com os alunos, para poder, de forma oral, avaliar o domínio desse assunto por parte dos alunos. Assim, constatou-se que a maioria da sala possuía dificuldade nessas matérias.

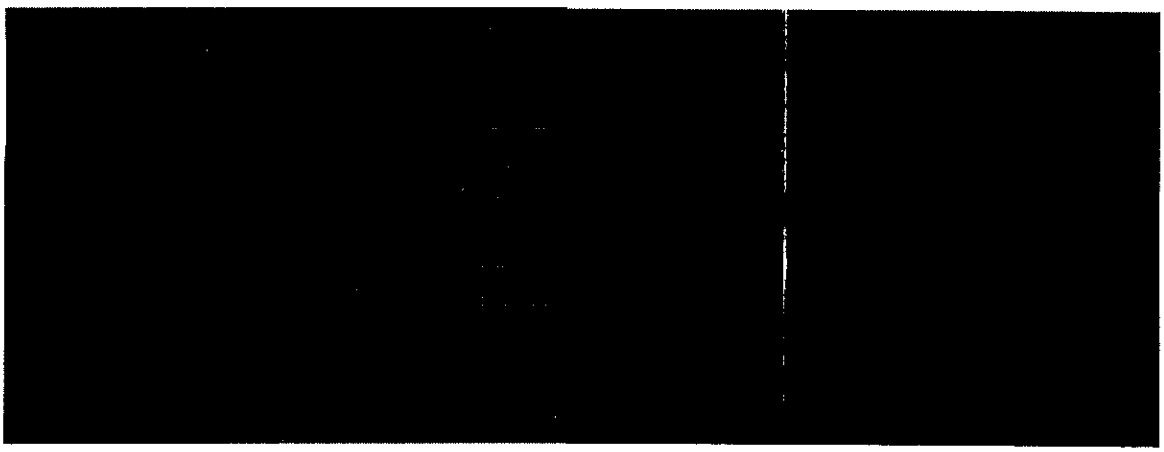

Figura 7: listas de Exercícios de Sondagem elaboradas pelo autor e resolvidas por dois alunos onde constata-se que o da direita não realizou nenhuma das operações corretamente, e constata-se que o da esquerda realizou a maioria das operações.

Apostila e aplicação

Após analisar-se o panorama do desempenho da sala no assunto, foi o momento de se buscar a aplicação da metodologia que unia Teoria Musical às três operações concernentes à pesquisa. Para isso foi desenvolvida uma pequena apostila, dividida em três partes: Divisão de frações e a duração relativa das figuras musicais; Multiplicação de frações e a duração das figuras musicais; e Soma de frações e as ligaduras. Cada parte dessa apostila, a partir de agora chamadas de capítulos, era composta da explicação de Teoria Musical, da relação desta com as frações, de exemplos de atividades envolvendo Teoria Musical e as operações com frações e finalmente, exercícios para fixação, sendo alguns com a interdisciplinaridade e outros puramente matemáticos.

As aulas de aplicação do material consistiam em explicar brevemente os conceitos musicais com auxílio de tabelas, de gráficos e de instrumentos musicais levados pelo professor e logo após a exemplificação matemática, utilizando a interdisciplinaridade. Na primeira aula após a sondagem, os alunos participaram das aulas dando exemplos de experiências vividas com a música e nós buscamos atrelar os diferentes ritmos à Matemática, a partir das aplicações diretas dessa relação. Um exemplo dessa situação foi que um aluno disse que gostava de rap, então mostramos a relação da produção deste tipo de música e as constantes frações que um DJ usa ao fazer a batida. Depois de exemplos assim, esperávamos atrair a atenção da sala para o assunto, e consequentemente para a Matemática.

Primeiro capítulo da apostila

No primeiro capítulo, foi abordada a ideia de relacionar as durações relativas das figuras ao conceito de divisão de frações, mais especificamente como operação inversa da multiplicação. Através de uma tabela dada para cada aluno onde estão representadas visualmente as proporções (Figura 8), e também através do som do instrumento musical, buscou-se explicar a divisão com o conceito de "quantos cabem".

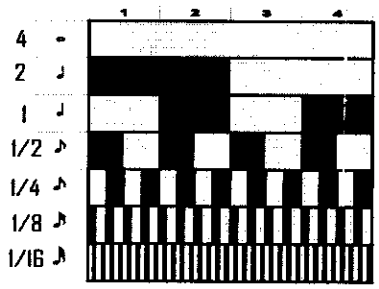

Figura 8: tabela elaborada pelo autor, onde se representa as durações relativas, tendo as figuras e as durações em forma de fração convencional e em forma de barras de mesmo comprimento, divididas em partes iguais.

Assim, os exemplos e as atividades desse capítulo exploraram a ideia de quantas figuras de um determinado valor poderiam "caber dentro" de outra figura, com valor diferente (Figura 9). Os alunos assim poderiam transferir tal ideia para a operação com números fracionários.

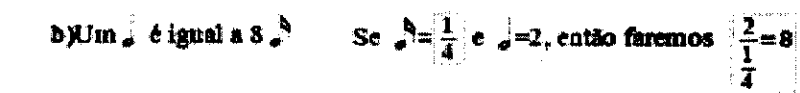

Figura 9: exemplo de atividade já resolvida do material elaborado pelo autor para a aplicação.

Segundo capítulo da apostila

No capítulo de número dois, a multiplicação de números fracionários foi apresentada pela ótica das durações absolutas das figuras musicais inicialmente. A ligação começaria quando se estabelecia um valor para a semínima, de duração relativa igual a um inteiro, de onde sairiam todas as durações absolutas em segundo. Como para descobrir-se a duração absoluta das outras figuras, seria necessário multiplicar a duração da semínima em segundos pela duração relativa de cada figura, chegar-se-ia a uma multiplicação com frações.

Como os alunos já saberiam dividir frações, a visão utilizada seria a de que a multiplicação é a operação inversa da divisão, ou seja, multiplicando-se por uma fração com numerador igual a um, chegaríamos ao mesmo resultado de se dividir pelo inverso desse número. Assim, as atividades buscariam que o aluno pudesse descobrir que a multiplicação de um fator por frações próprias resultariam num número menor que o fator citado anteriormente.

Portanto, as atividades dessa parte, consistiriam em atribuir uma duração em segundo para a semínima e esperar que os alunos descobrissem a duração em segundos de outras figuras, como nos mostra a Figura 10.

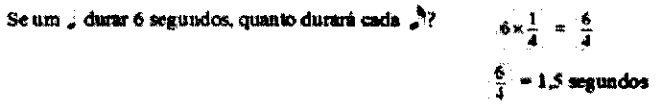

Figura 10: exemplo de exercício elaborado pelo autor para a aplicação do material em sala, já resolvido.

Terceiro Capítulo da apostila

Já no terceiro capítulo, relacionaram-se as ligaduras à adição de frações. Como os alunos já saberiam que cada figura tinha o dobro do valor da próxima, somar duas figuras iguais, resultaria na duração relativa da figura anterior. Assim, através da simbologia musical (Figura 11), os alunos chegariam por si mesmos à conclusão de que com frações de denominadores com potências de dois, poderia se fazer o mesmo. Sendo assim, criou-se um "atalho" na resolução de adições de frações.

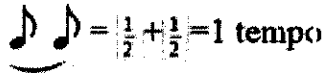

Figura 11: exemplo elaborado pelo autor para a aplicação do material em sala, onde temos um exemplo de adição de duas figuras iguais que somadas resultam no dobro da duração relativa.

Entretanto, se fossem figuras diferentes, seria necessário igualar os denominadores, como em qualquer soma de frações com denominadores diferentes, portanto também foi

revisado o conceito de Mínimo Múltiplo Comum. Por fim, os exercícios deste capítulo mesclariam as adições com denominadores iguais com os de diferentes, como nos mostra a Figura 12:

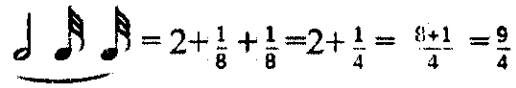

Figura 12: exemplo de exercício elaborado pelo autor para a aplicação do material em sala, onde se pode ver o procedimento para resolução das adições de figuras e seus valores fracionários.

Sondagem Final

Após a aplicação da apostila e de todas as atividades programadas, os alunos foram submetidos a uma sondagem final, para se avaliar a efetividade do método utilizado. Como na sondagem inicial, os alunos resolveriam individualmente nove exercícios, sendo que seriam três de divisão de frações, três de multiplicação de frações e três de adições de frações. Porém, agora teríamos um exercício envolvendo a simbologia musical para cada operação, como vemos na Figura 13:

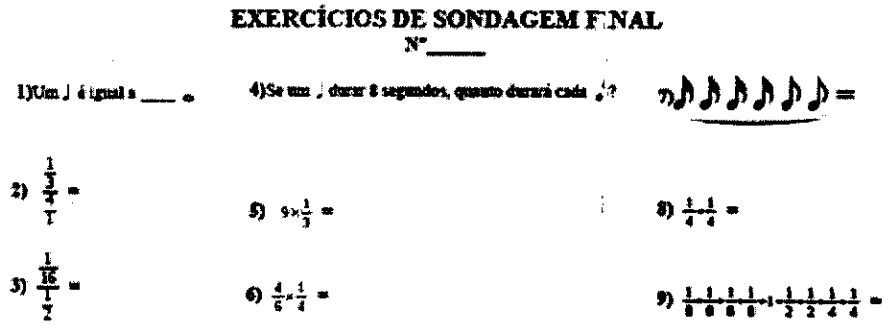

Figura 13: lista de exercícios de sondagem final, elaboradas pelo autor para a aplicação, como avaliação final

Para essa lista final, não haveria consulta ao professor senão para dúvidas relacionadas, somente ao material usado durante as aulas, como a apostila e anotações no caderno. A tabela contendo os resultados da Sondagem Final pode ser vista na Tabela 15, onde se constata o desempenho melhor em divisão e multiplicação de frações e um desempenho aquém do esperado em adição de frações.

Considerações finais

O objetivo dessa pesquisa foi elaborar um método interdisciplinar, que envolvesse Teoria Musical e Matemática e que pudesse auxiliar no ensino de divisão, multiplicação e adição de frações. Portanto, o planejamento ocorreu para que na sala de 9º ano em que o

método foi aplicado pudesse haver melhores resultados na lista de sondagem final que na inicial, para então se constatar que o uso dos conceitos musicais escolhidos tenha sido efetivo. Então, após o término da realização das atividades em sala de aula foram analisados e comparados os resultados das listas de sondagem inicial, cujas estatísticas vemos na Tabela 14 e das listas de sondagem final, da Tabela 15. Porém, com base no estudo e na análise de resultados, constatou-se que na onde esta pesquisa foi realizada houve a melhora esperada somente na divisão e na multiplicação de frações, acontecendo que na adição de frações não se constatou uma melhora evidente.

Tabela 14 - número de acertos por operação na sondagem inicial

Exercícios	Acertos	Porcentagem	Total de exercícios	Total de alunos
Exercícios de divisão	19	27,53%	69	23
Exercícios de multiplicação	29	42,02%	69	23
Exercícios de adição	33	47,82%	69	23

Tabela 15 - número de acertos por operação na sondagem final

Exercícios	Acertos	Porcentagem	Total de exercícios	Total de alunos
Exercícios de divisão	36	52,17%	69	23
Exercícios de multiplicação	39	56,52%	69	23
Exercícios de adição	24	34,78%	69	23

Pode-se supor que o avanço ocorrido na divisão e multiplicação de frações nesta sala se deveu principalmente à aplicação de Teoria Musical que estes dois conteúdos possuíram no material elaborado para as aulas. Através de uma simbologia diferenciada, que unia a Matemática com a Teoria Musical, pode-se ter ocorrido uma melhor compreensão do processo operatório, ou seja, ir além do método tradicional de ensino destes conteúdos pode ter ajudado nesse caso específico, possibilitando ao aluno o pensamento de relações entre números fracionários e suas operações em uma variedade de simbologias, como cita uma das Competências da Matriz de Referência do Saresp (FINI, 2009, p.74). Neste método se uniram elementos visuais (tabelas) e audíveis (música) às explicações matemáticas sobre as operações, ligando o abstrato ao mundo físico como o PCN (BRASIL, 2000) de Matemática salienta ser fundamental, e isto provavelmente proporcionou uma compreensão mais ampla que foi observada nos resultados indicados na tabela. Outra hipótese é a de que muitos alunos já sabiam realizar tais operações, entretanto não se recordavam do processo, e através da revisão se lembraram e conseguiram realizar alguns exercícios, o que é possível, pois se trata de uma sala de 9° ano do Ensino Fundamental.

Por outro lado, na adição de frações, não se constatou uma melhora notável nem na análise estatística, nem na observação da sala durante a aplicação do material elaborado para a pesquisa. Vários fatores podem ter levado a esses resultados, porém destacam-se algumas hipóteses, dentre elas a de que a aplicação da Teoria Musical no caso da adição não foi concreta o suficiente como foi na divisão e multiplicação de frações. E a outra hipótese se trata do uso de Mínimos Múltiplos Comuns na adição de fatores com denominadores diferentes, onde alguns alunos podem não ter compreendido o processo mesmo após a revisão feita durante a aplicação do material.

Após a aplicação e análise dos resultados, notamos que na adição de frações, apesar de a Teoria Musical servir de pano de fundo como no resto da pesquisa, ela precisaria de mais ajustes, mais tempo ou então abordagens diferentes da realizada, podendo envolver novos modelos musicais ou ainda necessitaria de um maior aprofundamento no tema. Pois os métodos tradicionais de ensino foram tão efetivos nessa sala para o ensino da soma de frações, quanto o método elaborado com Teoria Musical e Matemática foi nesse caso específico, uma vez que a adição de figuras musicais utilizando ligaduras se trata tão somente de uma adição de frações tradicional utilizando-se de simbologia musical, revelando não ter sido uma aplicação interessante nesse ambiente da sala.

Assim, indo contra as expectativas, mesmo após a aplicação do material elaborado e da lista de sondagem final, ainda apareceram muitos erros que evidenciaram que os alunos não conseguiram compreender a soma com denominadores diferentes e operaram com as frações somando denominadores com denominadores e numeradores com numeradores, ou seja, não igualaram os denominadores utilizando o m.m.c. como o processo correto requer (Figura 16). Esse tipo de erro descrito anteriormente também foi identificado por Cruz e Spinillo (2004, p. 15), onde os autores descrevem que alguns alunos erram ao perceber as frações como números inteiros. Sendo assim, pode-se ter sido um erro não se ter dado maior ênfase neste ponto, sendo necessário, que se fossemos realizar outra pesquisa neste enfoque em uma situação parecida essa parte poderia receber um cuidado maior que o dado nesse caso, podendo até ter um "capítulo" específico.

Figura 16: exemplos de exercícios retirados da lista de exercícios de sondagem final

Essa suposição parte do ponto em que as somas com denominadores iguais apresentaram melhores resultados nas avaliações, e havia até uma maior compreensão que era observada durante as explicações nas aulas. Porém quando foram questionados sobre os mínimos múltiplos comuns, muitos alunos demonstraram dúvidas e a maioria dos alunos disse não saber tal conteúdo. Então, o método para a adição pode ter falhado ao ser desenvolvido, por desconsiderar um cenário tão adverso. Além disso, o tempo dedicado à aplicação do material de adição pode ter sido pouco para tal conteúdo, apesar de ter sido o mesmo que para a aplicação do material nosso para divisão e multiplicação de frações.

Sendo assim, a Teoria Musical se mostrou aliada nessa pesquisa na divisão e multiplicação de frações, sendo eficaz e servindo de ferramenta interdisciplinar, garantindo melhores resultados nesta sala especificamente e podendo também servir para outras salas numa situação parecida. Entretanto, no campo da adição de frações não pudemos observar ou constatar melhoras nessa situação, porém partindo das hipóteses levantadas por nós após a pesquisa de campo, pode-se evoluir a ideia de usar a Teoria Musical na adição de frações em outros trabalhos científicos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/ SEF, 1998. 148p.

CRUZ, M. S. S.; SPINILLO, A.G. **Resolvendo adição de frações através do simbolismo matemático e através de âncoras**. Revista Quadrante, v.13, n.2, p. 3- 30, 2004.

FINI, M. I. (Coord.). **Matrizes de referência para a avaliação Saresp**. São Paulo: SEE, 2009.

JULIANI, Juliana Pimentel. **Matemática e Música**. 2003. 85 f. Dissertação (Graduação em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, 2003

MED, Bohumil. **Teoria da Música**, 4 ed. Brasília: Musimed, 1996

OLEGÁRIO, Príscila Gomes. **Frações: "afinando" as linguagens matemática e musical.** 2013. 104f. Monografia (Graduação em Licenciatura) – Instituto Federal de Educação e Tecnologia Fluminense Campus Campos, Campos dos Goytacazes, 2013

WRIGHT, David. **Mathematical World: Mathematics and Music**, vol. 28. American Mathematical Society, 2009