GEOMETRIA FRACTAL

Ana Carolina Sakamoto[1*] Fábio Crivelli de Ávilla[1]
[1]Departamento de Exatas, Faculdades Integradas Regionais de Avaré, Fundação Regional Educacional de Avaré, Avaré, São Paulo, Brasil. [*]E-mail: karol_sakamoto@hotmail.com

Resumo - A geometria fractal tem sido aplicada e calculada em diversos campos, inclusive na medicina, com aplicações em análise das imagens de tumores. Existem aplicações de fractais na Minerologia, no estudo da densidade dos minerais; na biologia; nas indústrias; na ecologia e até mesmo na economia. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre a geometria fractal que analisa figuras que possuem dimensão não inteira, tendo como característica principal a parte da figura assemelhar-se ao todo. Para isso, será feita uma pesquisa bibliográfica, visando embasamento teórico, para demonstrar a dimensão não inteira de figuras construídas por processos iterativos, envolvendo conceitos matemáticos como comprimento, área e volume, envolvidos nas construções da curva de Koch, tapete de Sierpiensk e esponja de Menger.

Palavras-chave **– Koch, Menger, Sierpinski.**

Abstract. Fractal geometry has been calculated and applied in various fields, including medicine, with applications in image analysis of tumors. There are applications on the fractals of Mineralogy, the study of the mineral density; biology; in industries; ecology and even the economy. In this context, the aim of this paper is to present a study on the fractal geometry which analyzes figures that have non-integer dimension, having as main characteristic of the figure resemble the whole. For this, a literature search, theoretical foundation aiming to demonstrate non-integer dimension of figures constructed by iterative processes, involving mathematical concepts such as length, area and volume, involved in the construction of the Koch curve, carpet Sierpiensk and Menger sponge will be taken.
Key-words: – Koch, Menger, Sierpinski

I. INTRODUÇÃO

A Geometria Fractal teve sua teoria desenvolvida em 1975 por Benoit Mandelbrot, um polonês nascido em 1924, porém criado na França onde sua família buscou refúgio da Segunda Guerra Mundial. Foi em Paris que Benoit deu seus primeiros passos na matemática, tendo aulas com seu tio Szolem Mandelbrot no “Collège de France”.

Benoit Mandelbrot teve sua primeira obra concluída sobre a geometria que descreve as reais formas da natureza, faltando então, um nome para “batizar” a descoberta. Foi então que pesquisando em um dicionário latim encontrou o nome fractus, do verbo frangere, que significa quebrar e assim nasceu o nome Fractal.

Fractal define-se por um objeto que não apresenta variações à medida que é analisado, ou seja, uma parte de um objeto nas menores das escalas representa o objeto como um todo.

Existem também os fractais denominados naturais e que podemos observar em nosso dia-a-dia, como por exemplo, nas nuvens, nas montanhas, nos rios, nos vasos sanguíneos, nas células, nas florestas e até mesmo nos relâmpagos do espaço. E, apesar dos fractais estarem presentes por toda parte os mesmos foram estudados a fundo apenas no século XX [1,2,3].

Define-se Fractal por uma figura geométrica, de aparência irregular ou fragmentada, que pode ser subdividida indefinidamente em partes, onde essas partes de certo modo são cópias reduzidas do todo.

Quando o todo é uma ampliação perfeita de uma parte conclui-se que o fractal é geométrico. Os fractais geométricos foram criados no início do século XX para mostrar que existiam elementos matemáticos diferentes do que dizia a geometria clássica de Euclides (300 a.C.)[4].

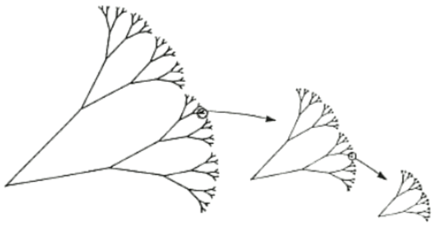


Figura 1 – Exemplo de fractal geométrico

Quando o todo é uma ampliação semelhante a uma parte defini-se que o fractal é aleatório ou natural.

Na imagem abaixo é possível observar os vários níveis de ampliação:

Figura 2 – Samambaia - Exemplo de fractal aleatório ou natural.

O Fractal de Mandelbrot tem uma forma muito particular de auto-semelhança, tem uma repetição infinita do conjunto e também uma infinita variedade de formas, como se pode obsevar pelas ampliações desse Fractal [4].

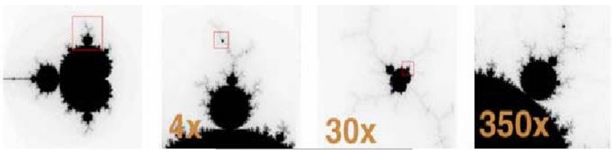


Figura 3 – Ampliação do Fractal de Mandelbrot

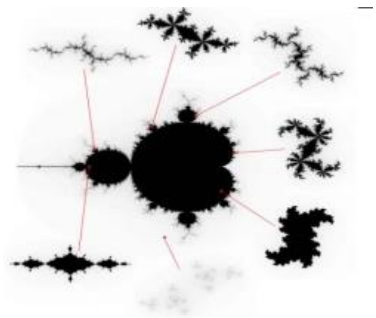


Figura 4 – Ampliação de outras áreas do Fractal de Mandelbrot.

II. MATERIAIS E MÉTODOS

Para o desenvolvimento desse trabalho foram utilizadas pesquisas bibliográficas através de livros, periódicos matemáticos, artigos científicos/acadêmicos, materiais didáticos, sites e revistas.

III. RESULTADOS

Pretende-se construir os fractais e calcular suas dimensões.

A dimensão de um fractal determina o grau de ocupação deste no espaço.

Os fractais têm valores fracionários na sua dimensão, diferente da geometria euclidiana que tem valores inteiros [5].

Será demonstrado abaixo o cálculo de alguns fractais geométricos.

E a dimensão dos fractais aleatórios/naturais será apresentado na tabela 1 [6].

O comprimento C é a medida para os objetos com dimensão $D = 1$.

A área A é a medida para os objetos com dimensão $D = 2$.

O volume V é a medida para os objetos com dimensão $D = 3$.

Nos fractais essas medidas são casos particulares. Uma medida geral M_D depende da dimensão D , portanto, M_1 é o comprimento, M_2 é a área e M_3 é o volume.

Para medir a área de uma figura plana qualquer, uma das maneiras é contar quantos quadrados são necessários para recobrir toda figura.

Ao cobrir a figura com os quadrados de lado d , tem-se que cada quadrado tem (área)

$A = d^2$ assim se forem necessários N quadrados de lado d, pode-se afirmar que:

$$A = N.d^2$$

Porém, essa área será maior que a área verdadeira, pois alguns pedaços ficaram para fora, para chegar à área cada vez mais aproximada é necessário utilizar quadrados cada vez menores.

Isso indica uma maneira de determinar a dimensão D das figuras fractais, utilizando quadrados *(fractais)* cada vez menores. O tamanho total do fractal (comprimento, área ou volume) será dado por:

$$M_D = N.d^D$$

Onde N representa o número de quadrados (fractais) necessários para recobrir o fractal, d o seu lado e d^D representa a área de cada quadrado *(fractal).*

A dimensão fractal D deve ser diferente de $\mathbf{0}$ e $\mathit{não\ infinita.}$

Para que haja uma compreensão melhor, utiliza-se esse processo para calcular a dimensão fractal de um quadrado.

Considera-se um quadrado de lado l, onde a cada iteração divide o lado por dois. Cada iteração é chamada de N, assim para:

$N(0)$ é necessário $\mathbf{1}$ quadrado, ou seja $\mathbf{4^0}$, onde seu lado é:

$$l = d.$$

$N(1)$ são necessários $\mathbf{4}$ quadradinhos ou seja $\mathbf{4^1}$, onde seu lado corresponde:

$$\frac{l}{2} = d$$

$N(2)$ são necessários $\mathbf{16}$ quadradinhos ou seja $\mathbf{4^2}$, onde seu lado corresponde:

$$\frac{l}{4} = \frac{l}{2^2} = d$$

$N(3)$ são necessários $\mathbf{64}$ quadradinhos ou seja $\mathbf{4^3}$, onde seu lado corresponde:

$$\frac{l}{8} = \frac{l}{2^3} = d$$

Portanto na iteração n obtem-se que:

$N(n)$ são necessários $\mathbf{4^n}$ quadradinhos, onde seu lado corresponde:

$$\frac{l}{2^n} = d$$

Agora é necessário saber qual é a área de cada quadradinho na iteração n.

A área é proporcional ao lado elevado a uma potência desconhecida.

$$A = d^D$$

Logo, na n-ésima iteração:

$$A = \left(\frac{l}{2^n}\right)^D$$

Que indica a área de cada quadradinho.

Assim, a área total é:

$$A_t = N(n).A$$

$$A_t = 4^n.\left(\frac{l}{2^n}\right)^D$$

Portanto:

$$A_t = \left(\frac{4}{2^D}\right)^n.l^D$$

É importante lembrar que para a área ter sentido é utilizado um número n de iteração muito grande $(n \to \infty)$. O valor de D é desconhecido, mas se o número $\frac{4}{2^D} > 1$ a área total aumentaria conforme aumentamos n e se $\frac{4}{2^D} < 1$ área total diminuiria quando aumentamos n, portanto $\frac{4}{2^D} = 1$, pois é a única possibilidade para que a área seja bem definida.

Implica:

$$\frac{4}{2^D} = 1$$

$$4 = 2^D$$

$$D = 2$$

O que demonstra pelo processo, que o quadrado de lado l tem dimensão $2,$ o que já era conhecido.

3.1 Curva de Koch

O mesmo método será utilizado para encontrar a dimensão de um objeto Fractal.

Será construído e calculado a dimensão D da Curva de Koch

Inicia-se a construção a partir de um segmento de reta:

Nesta 1ª iteração obtém:

$N(1) = 1 = 4^0$

$d = l$

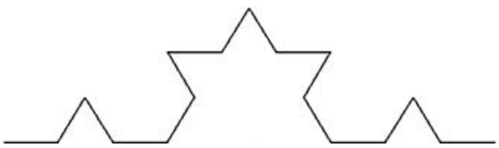
Na 2ª iteração divide-se o segmento de reta em três segmentos de comprimento igual e desenha-se um triângulo equilátero no segmento central onde será utilizada como base, a base deve ser retirada:

Nesta iteração obtem-se:

$N(2) = 4 = 4^1$

$d = \frac{l}{3} = \frac{l}{3^1}$

Procedendo da mesma forma para cada um dos 4 segmentos:

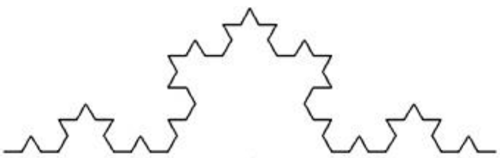


Portanto na 3ª iteração:

$N(3) = 16 = 4^2$

$d = \frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$

E na 4ª iteração:



$N(4) = 64 = 4^3$

$d = \frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$

Esse processo deve ser repetido infinitas vezes, com isso na n-ésima iteração obtem-se:

$N(n) = 4^{n-1}$

$d = \frac{l}{3^{n-1}}$

Sabendo que o comprimento é:

$C = d^D$

Na n-ésima iteração tem-se:

$C = \left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$

Logo o comprimento total é:

$C_t = N(n).C$

$C_t = (4^{n-1}).\left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$

$C_t = \left(\frac{4}{3^D}\right)^{n-1}.l^D$

Lembrando que:

$\left(\frac{4}{3^D}\right) = 1$

Então:

$4 = 3^D$

$ln4 = ln3^D$

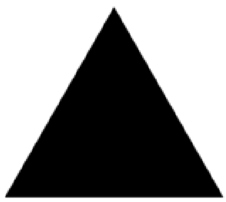
$D = \frac{ln4}{ln3}$

$D \cong 1,26$

Portanto, a dimensão D da Curva de Koch é aproximadamente 1,26.

3.3 Triângulo de Sierpinski

Inicia-se com um triângulo equilátero:

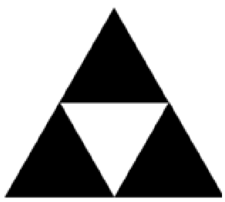


Nesta 1^a iteração tem-se:

$N(1) = 1$

$d = l$

Divide-se o triângulo em 4 triângulos de lados iguais e retira-se o triângulo central:



Portanto, na 2ª iteração tem-se:

$N(2) = 3$

$d = \frac{l}{2}$

Na 3ª iteração divide-se cada triângulo em 4 novamente, retirando o central, assim:

$N(3) = 9 = 3^2$

$d = \frac{l}{4} = \frac{l}{2^2}$

Na 4ª iteração:

$N(4) = 27 = 3^3$

$d = \frac{l}{8} = \frac{l}{2^3}$

Portanto, na n-ésima iteração tem-se:

$N(n) = 3^{n-1}$

$d = \frac{l}{2^{n-1}}$

Sabendo que a área é:

$A = d^D$

$A = \left(\frac{l}{2^{n-1}}\right)^D$

Logo a área total é dada por:

$A_t = N(n).A$

$A_t = 3^{n-1}.\left(\frac{l}{2^{n-1}}\right)^D$

$A_t = \left(\frac{3}{2^D}\right)^{n-1}.l^D$

Consequentemente:

$\frac{3}{2^D} = 1$

$3 = 2^D$

$ln3 = D.ln2$

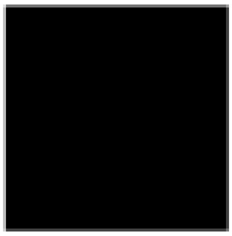
$D = \frac{ln3}{ln2}$

$D \cong 1{,}585$

Conclui-se que a dimensão D do Triângulo de Sierpinski é aproximadamente 1,585.

3.3 Tapete de Sierpinski.

A construção do Tapete de Sierpinski inicia-se com uma figura de dimensão D=2 chamado de quadrado na Geometria Euclidiana.

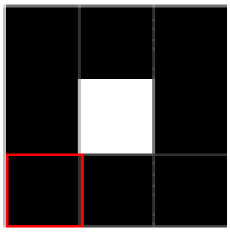


Nesta 1ª iteração temos:

$N(1) = 1$

$d = l$

Dividindo o quadrado em nove partes, e removendo a parte central, têm-se oito pequenos quadrados.

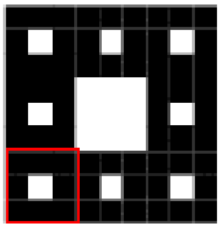


Portanto, na 2ª iteração:

$N(2) = 8$

$d = \frac{l}{3} = \frac{l}{3^1}$

Novamente subdividindo-se em nove partes, cada quadrado, onde é retirada a parte central.

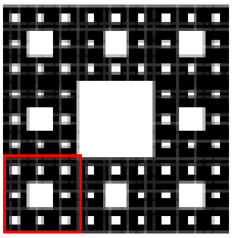


Isso implica que, na 3^{a} iteração obtem-se:

$$N(3) = 64 = 8^2$$

$$d = \frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$$

Na 4^{a} iteração:



$$N(4) = 512$$

$$d = \frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$$

Esse processo pode ser repetido diversas vezes, então na iteração n:

$$N(n) = 8^{n-1}$$

$$d = \frac{l}{3^{n-1}}$$

Na n-ésima iteração a área é dada por:

$$A = d^D$$

$$A = \left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$$

Logo a área total será:

$$A_t = N(n).A$$

$$A_t = 8^{n-1}.\left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$$

$$A_t = \left(\frac{8}{3^D}\right)^{n-1}.l^D$$

Consequentemente:

$$\frac{8}{3^D} = 1$$

$$8 = 3^D$$

$$ln8 = D.ln3$$

$$D = \frac{ln8}{ln3}$$

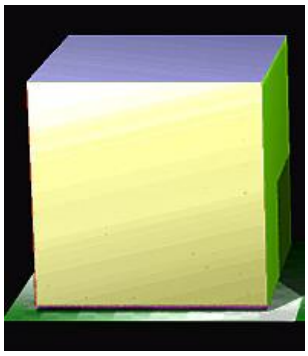
$$D \cong 1{,}8928$$

Portanto, a dimensão D do Tapete de Sierpinski é aproximadamente 1,8928.

3.4 Esponja de Menger

Por fim, o cálculo da dimensão da Esponja de Menger

Na 1^{a} iteração utiliza-se uma figura com dimensão $D = 3$ com o nome de cubo.

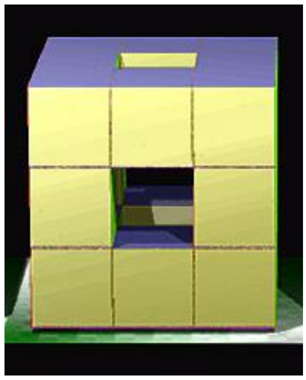


Nesta iteração tem-se:

$$N(1) = 1$$

$$d = l$$

Na 2^{a} iteração é necessário que divida as faces do cubo em 9 quadrado retirando o cubo do meio de cada face e o cubo central:



Observa-se que:

$$N(2) = 20$$

$$d = \frac{l}{3}$$

Na 3^{a} iteração repete-se o processo descrito anteriormente obtendo:

Isso implica:

$N(3) = 20^2$

$d = \frac{l}{9} = \frac{l}{3^2}$

Na 4^a iteração:

Tem-se:

$N(4) = 8000 = 20^3$

$d = \frac{l}{27} = \frac{l}{3^3}$

Portando na n-ésima iteração:

$N(n) = 20^{n-1}$

$d = \frac{l}{3^{n-1}}$

Sabendo que o volume é dado por:

$V = d^D$

$V = \left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$

Logo o volume total:

$V_t = N(n).V$

$V_t = 20^{n-1}.\left(\frac{l}{3^{n-1}}\right)^D$

$V = \left(\frac{20}{3^D}\right)^{n-1}.l^D$

Assim:

$\frac{20}{3^D} = 1$

$20 = 3^D$

$ln20 = ln3^D$

$ln20 = D.ln3$

$D = \frac{ln20}{ln3}$

$D \cong 2{,}726$

Conclui-se que a dimensão D da Esponja de Menger é aproximadamente 2,726.

3.5 Fractais aleatórios/naturais e suas dimensões

A natureza está repleta de fractais. Recentemente as indústrias e alguns ramos da ciência começaram a explorar as formas fractais.

Na Medicina o fractal está sendo utilizado como método de diagnóstico de várias patologias, o mais desenvolvido é o do cancro. Os experimentos sugerem que os tumores cancerosos têm dimensão fractal superior a de tecidos normais.

As antenas fractais são capazes de funcionar de forma simultaneamente em várias frequências, ao contrário das antenas tradicionais.

Muitos processos naturais são utilizados na ciência, na física, na biologia, na geologia com representação de estruturas de fractais. A tabela abaixo mostra algumas dessas aplicações.

Tabela 1. Dimensão dos fractais aleatórios/naturais, com aproximações variáveis.

IV. CONCLUSÃO

Neste artigo foi apresentada a teoria da Geometria Fractal. Foram calculadas também as dimensões dos fractais geométricos e mostrada a dimensão dos fractais naturais.

Além disso, foi mostrada a importância da geometria fractal para os estudos na medicina, na biologia, na astrofísica, na geologia e na ciência, apesar dessa larga aplicação da geometria em diversos campos, os estudos são considerados recentes.

Benoit Mandelbrot que na década de 70 buscou entender as reais irregularidades da natureza, mostrou que coisas infinitamente grandes podem caber em um espaço pequeno e limitado. Especulações dizem que Benoit tinha dificuldades em lidar com a matemática pura e por conta disso buscou entendê-la estudando as figuras da natureza, ou seja, nas grandes dificuldades de Benoit apareceu sua maior descoberta.

Com o uso de computadores para fazer cálculos complexos e simulações, Benoit revolucionou a matemática, pois seria praticamente impossível e inviável os cálculos serem feitos manualmente. Benoit teve uma visão diferente de todos os estudiosos que tentaram entender as formas da natureza por conta de conseguir enxergar formas geométricas nos céus, nas montanhas, nas florestas e etc.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado forças para seguir nessa caminhada.

Agradeço aos meus pais Sonia e Luiz que me deram toda a estrutura para me tornar a pessoa que sou hoje, pelo carinho, pelo incentivo, por sempre acreditar em mim e aos meus irmãos Tatiane e Marcelo pela ajuda, carinho e paciência.

Agradeço de modo geral a toda minha família pelas orações nos dias de prova e por todo o carinho.

Em especial agradeço meu namorado Rafael Tristão, por ter vivido esse momento comigo, pelo apoio nos momentos mais difíceis, pela ajuda, pelo incentivo, pelo carinho, pelo amor e por tornar minha vida cada dia mais feliz.

Agradeço aos meus colegas de classe, em especial as amigas Isabela, Patrícia e Thais por estarem comigo nesses 4 anos, pelas risadas, pelos medos e principalmente pela amizade.

Agradeço a todos os professores que se dedicaram durante o curso para transmitir seus conhecimentos, em especial ao meu professor orientador Fábio Crivelli de Ávilla pelo apoio, dedicação, atenção e conhecimento e pela professora Luciane que nunca deixou de me ajudar.

Área	Sistema	Dimensão fractal
Biologia	Olho humano	1,7
	Pulmão	2,2
	Cérebro dos mamíferos	2,6
	Ramificação das plantas	$2,2 < d < 2,8$
	Proteínas	$1,6 < d < -2,4$
	Colônias de fungos e bactérias	1,4 (borda) 1,9 (massa)
Geociência	Linhas costeiras	$1,2 < d < 1,4$
	Meandros de rios	$1 < d < 1,2$
	Contornos topográficos de Montanhas	$1,1 < d < 1,3$
	Objetos fragmentados (granito, carvão, basalto, quartzo)	$2,1 < d < 2,6$
Cosmologia	Distribuição de galáxias no universo	1,2

REFERÊNCIAS

1. JANOS, M. Geometria Fractal. Rio de janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.
2. Disponível:<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/mandelbrot.htm> .Acesso em: 07 de setembro de 2012.
3. Disponível:<http://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/geometria-fractal.html>. Acesso em: 10 de setembro de 2012.
4. Disponível<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico1.php >. Acesso em: 10 de setembro de 2012.
5. TEIXEIRA,H. A Integração da Geometria Fractal em Sala de Aula. Aparecida de Goiânia, 2010.
6. Disponível:<http://www.geocities.ws/projeto_caos_ufg/fractais/fractais5.html> Acesso em: 05 de setembro de 2012.